

MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I - Matrices et opérations sur les matrices

1 Généralités

Définition.

- Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes.
- Dans ce cours on notera $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Ainsi $a_{i,j}$ (ou $A_{i,j}$) désignera le coeff de la ligne i , colonne j .
- Il existe aussi une façon "développée" d'écrire cette matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont égales ssi $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $A_{i,j} = B_{i,j}$.

Cas particuliers :

- si $n = 1$, A est une "matrice **ligne**".
- si $p = 1$, A est une "matrice **colonne**". Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'identifie à un élément de $\mathbb{K}^n$.
- si $n = p$, A est une "matrice **carrée**". L'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle :

- i -ème ligne de A , la matrice ligne $L_i = [a_{i,1} \ a_{i,2} \ \dots \ a_{i,p}] \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
- j -ème colonne de A , la matrice colonne

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Notations :

- Soit $i, j \in \mathbb{N}$, on note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, appelé symbole de Kronecker.
- On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice **identité** $I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On note, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, la matrice **nulle** de taille $n \times p$: $0_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda A + \mu B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, (\lambda A + \mu B)_{i,j} = \lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}$$

Exemple :

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -3 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Attention : Pour ces opérations, les matrices A et B doivent avoir la même taille (même nombre de lignes, même nombre de colonnes).

Définition (Matrices élémentaires). Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note souvent $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position (i, j) égal à 1. Ces matrices sont appelées les **matrices élémentaires** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \vdots \\ \text{ligne } i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples : Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toute matrice $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. En effet :

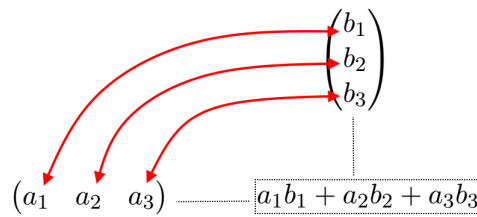
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \end{pmatrix} &= M_{1,1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{1,3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + M_{2,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{2,2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + M_{2,3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De façon générale, si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $M = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} M_{i,j} E_{i,j}$

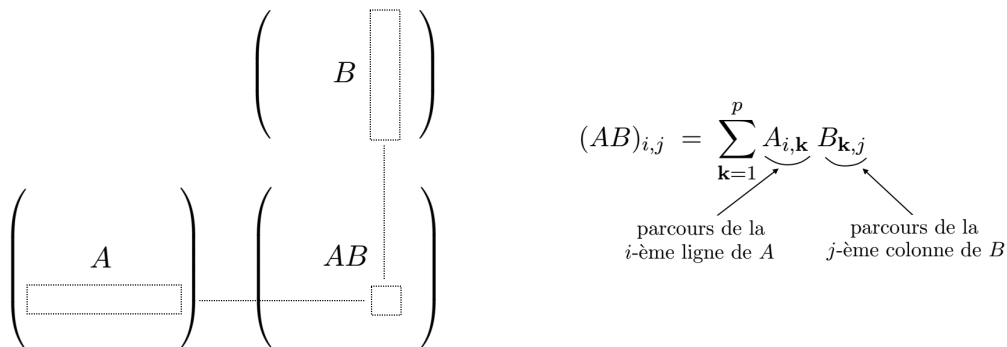
3 Produit matriciel

Définition.

- Le produit d'une matrice ligne $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et d'une matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est le **nombre** : $AB = \sum_{k=1}^n A_{1,k} B_{k,1}$.



- Le produit de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont chaque coefficient $(AB)_{i,j}$ est le produit de la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B .



Attention : Pour que l'opération soit compatible, il faut que le nombre de **colonnes** de A soit égal au nombre de **lignes** de B . Sinon $A \times B$ n'est pas définie !

On retiendra la règle : " $(n \times p)$ multiplié par $(p \times q)$ donne $(n \times q)$ "

Exemples :

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Alors : $AB = 2$.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :
- $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_A$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_B$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A \times B}$

Cf exo 1 Cf exo 2

Remarques.

- Le produit n'est pas commutatif : en général, $XY \neq YX$ (à noter que les matrices XY et YX n'ont même pas la même taille !).
- Un produit de matrices peut être nul (dans le sens, égal à une matrice nulle) alors qu'aucune des matrices du produit n'est nulle.
Par conséquent, en général, $AB = AC$ n'implique pas $B = C$, même si A est non nulle.

Proposition. Du moment que les opérations suivantes sont bien définies, on a :

- 1) $A(BC) = (AB)C$ (**associativité de $\times$**)
(on notera donc simplement ABC)
- 2) $(A + B)C = AC + BC$ (**distributivité à droite de $\times$ sur $+$**)
 $A(B + C) = AB + AC$ (**distributivité à gauche de $\times$ sur $+$**)
- 3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A(\lambda \cdot C) = (\lambda \cdot A)C = \lambda \cdot (AC)$
- 4) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$ (**les matrices identité sont des éléments neutres pour $\times$**)

Démonstration. Méthode générale : on calcule le coefficient i, j de chacune de ces matrices et on constate qu'on a égalité.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On a, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$,

$$\begin{aligned} (A(BC))_{i,j} &= \sum_{k=1}^p A_{i,k} (BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} \left(\sum_{\ell=1}^q B_{k,\ell} C_{\ell,j} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^q C_{\ell,j} \left(\sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^q (AB)_{i,\ell} C_{\ell,j} = ((A \times B)C)_{i,j} \end{aligned}$$

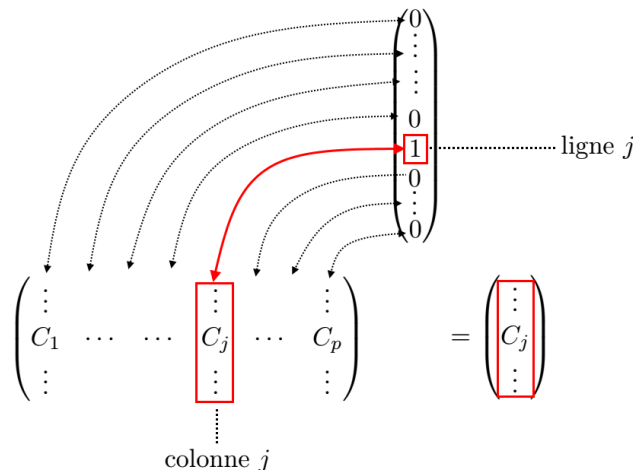
Ainsi, $(A(BC))_{i,j} = ((AB)C)_{i,j}$. Ceci étant vrai pour tous $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on en déduit : $A(BC) = (AB)C$.

2. Découle des définitions et de la linéarité de la somme.
3. Idem : c'est une simple conséquence des définitions (le λ sort de la somme).
4. Il suffit de poser le produit matriciel pour le constater.

□

Remarque. Dans la suite, notons $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_p := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $A = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 & C_2 & \dots & C_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{\text{colonnes de } A}$, alors, pour tout $1 \leq j \leq p$, $Ae_j = C_j$, car :



Lemme. Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ on a $AX = BX$, alors $A = B$.

Autrement dit, une matrice est entièrement caractérisée par la façon dont elle agit sur les matrices colonnes.

Démonstration. Supposons que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$. En particulier, pour $X = e_j$, pour $1 \leq j \leq p$, on obtient que la j -ième colonne de A est égale à la j -ième colonne de B .

Ceci étant valable pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on en déduit que $A = B$. □

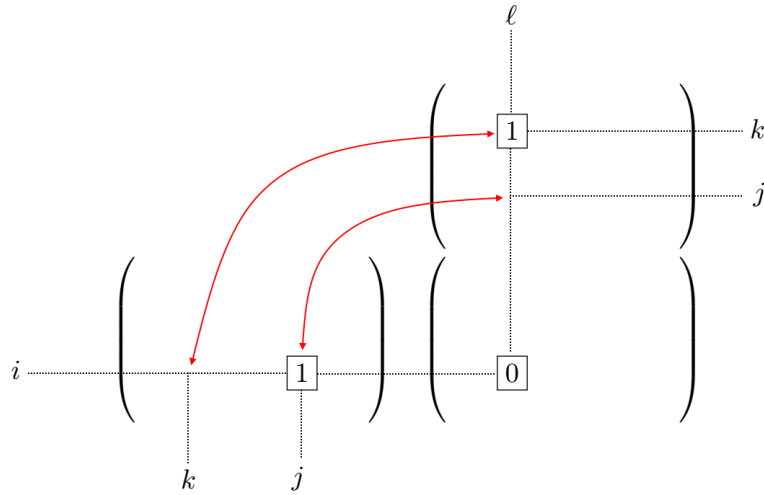
Exemples :

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = X$, alors $A = I_n$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = 0_{n,1}$, alors $A = 0_{n,n}$.

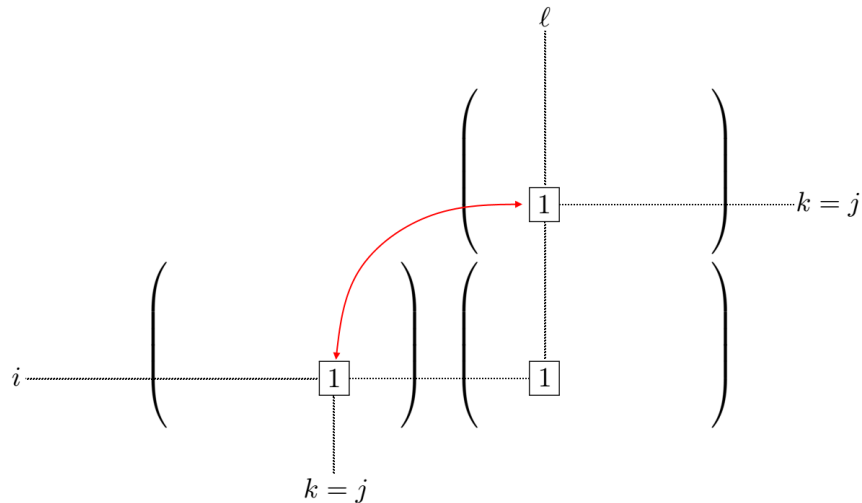
Remarque. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ et $(k, \ell) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$. On a

$$E_{i,j} \cdot E_{k,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ E_{i,\ell} & \text{si } j = k \end{cases}$$

En effet, si $j \neq k$,



En revanche, si $j = k$,



Autrement dit : $E_{i,j} \cdot E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.

4 Transposition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A , notée A^T , est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$(A^T)_{i,j} = A_{j,i}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq n.$$

Exemple : La transposée de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition. Du moment que les opérations suivantes sont définies,

(1) $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K});$

(2) $(A^T)^T = A;$

(3) $(A \times B)^T = B^T \times A^T.$

Démonstration. (1) et (2) sont évidentes et pour (3), on a

$$((A \times B)^T)_{i,j} = (A \times B)_{j,i} = \sum_{k=1}^n A_{j,k} B_{k,i} = (B^T \times A^T)_{i,j}$$

□

Partie II - Systèmes linéaires

1 Généralités et lien avec les matrices

Définition. On appelle *système d'équations linéaires* (ou *système linéaire*) un système du type :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1} \mathbf{x}_1 + a_{1,2} \mathbf{x}_2 + \cdots + a_{1,p} \mathbf{x}_p = y_1 & (L_1) \\ a_{2,1} \mathbf{x}_1 + a_{2,2} \mathbf{x}_2 + \cdots + a_{2,p} \mathbf{x}_p = y_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1} \mathbf{x}_1 + a_{n,2} \mathbf{x}_2 + \cdots + a_{n,p} \mathbf{x}_p = y_n & (L_n) \end{cases}$$

- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ (fixés et supposés connus) sont appelés les **coefficients** du système.
- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les $y_i \in \mathbb{K}$ (fixés, et supposés connus) forment le **second membre**.
- Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les $\mathbf{x}_j$ sont les **inconnues** du système (S) .
- On dit que (S) est un système à n équations et p inconnues.

Vocabulaire.

- On appelle **système homogène** associé à (S) le système (S) avec les $y_i = 0$ (et les $a_{i,j}$ inchangés).
- On appelle **solution** de (S) tout p -uplet $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifie les n équations.
- Si l'ensemble des solutions est vide, (S) est dit **incompatible**.
- S'il est non vide (il existe au moins un p -uplet solution), (S) est dit **compatible**.

Interprétations géométriques :

- **Lorsque $p = 2$** : chaque ligne (L_i) : $a_{i,1} \mathbf{x}_1 + a_{i,2} \mathbf{x}_2 = y_i$ (par exemple $2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 = 1$) est l'équation d'une droite dans le plan (pour un point $M(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$).
Résoudre un tel système à n équations correspond donc géométriquement à déterminer l'intersection de n droites.
Cela peut être une droite, un point, ou rien.
- **Lorsque $p = 3$** : chaque ligne (par exemple $3\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 = 5$) est l'équation cartésienne d'un plan dans l'espace (pour un point $M(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$).
Résoudre un tel système à n équations correspond donc géométriquement à déterminer l'intersection de n plans.
Cela peut être un plan, une droite, un point, ou rien.

Remarque fondamentale

Si on pose les matrices :

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \mathbf{X} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

Alors le produit matriciel $A\mathbf{X}$ donne

$$A\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \mathbf{x}_1 + \cdots + a_{1,p} \mathbf{x}_p \\ a_{2,1} \mathbf{x}_1 + \cdots + a_{2,p} \mathbf{x}_p \\ \vdots \\ a_{n,1} \mathbf{x}_1 + \cdots + a_{n,p} \mathbf{x}_p \end{pmatrix}$$

Donc si on pose $Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système (S) est équivalent à l'équation matricielle :

$$\boxed{A\mathbf{X} = Y}$$

Par exemple, le système $\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & & -x_3 & = & 5 \\ & -2x_2 & +x_3 & = & -7 \end{cases}$ équivaut à

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}}_Y$$

2 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition. Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système (S) sont :

1. **Permuter deux lignes L_i et L_j .** Notation : $L_i \longleftrightarrow L_j$

Interprétation matricielle : considérons la matrice de permutation $P_{i,j}$, de taille $n \times n$, obtenue en intervertissant L_i et L_j dans la matrice identité I_n , autrement dit :

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ligne i
ligne j

On remarque que le produit $P_{i,j} \times A$ s'obtient en exécutant l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ sur la matrice A . De même, $P_{i,j} \times Y$ s'obtient en intervertissant y_i et y_j dans la matrice colonne Y .

Conclusion : faire $L_i \longleftrightarrow L_j$ dans (S) revient à faire dans l'équation $AX = Y$ une multiplication à gauche par $P_{i,j}$: $\boxed{P_{i,j}AX = P_{i,j}Y}$.

2. **Multiplier une ligne L_i par une constante non nulle λ .** Notation : $L_i \leftarrow \lambda L_i$

Interprétation matricielle : cela revient à multiplier à gauche dans $AX = Y$ par la matrice de dilatation :

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ligne i

3. **Ajouter à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j .** Notation : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Interprétation matricielle : cela revient à multiplier à gauche dans $AX = Y$ par la matrice de transvection :

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ligne i
ligne j

NB : les matrices d'opérations élémentaires sur les lignes (permutation, dilatation, transvection) sont obtenues en appliquant l'opération élémentaire sur la matrice identité.

Remarque. Toutes ces opérations sont **inversibles**.

En effet, si (S) est un système linéaire :

1. si l'on exécute $L_i \longleftrightarrow L_j$, il suffit de refaire $L_i \longleftrightarrow L_j$ pour revenir au système initial;
2. idem si l'on exécute $L_i \leftarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \neq 0$, il suffit de faire $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$ (d'où l'importance de $\lambda \neq 0$);
3. et si l'on fait $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, il suffit de faire $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ pour revenir à (S) .

Traductions matricielles : on a les égalités suivantes

$$P_{i,j} \times P_{i,j} = I_n \quad D_i(\lambda) \times D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) = I_n \quad T_{i,j}(\lambda) \times T_{i,j}(-\lambda) = I_n$$

Conséquence logique de cette remarque : lorsque l'on résout un système linéaire en utilisant uniquement des opérations élémentaires, on peut procéder par équivalences !

3 Systèmes échelonnés

Définition. Un système linéaire est dit **échelonné** si chaque ligne non nulle du membre de gauche commence par davantage de zéros que la ligne précédente.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{p_1 x_{j_1}} + (\dots)x_2 + (\dots)x_3 + \dots \dots \dots + (\dots)x_p = y_1 & (L_1) \\ & \boxed{p_2 x_{j_2}} + \dots \dots \dots + (\dots)x_p = y_2 & (L_2) \\ & \vdots & \vdots \\ & \boxed{p_r x_{j_r}} + \dots + (\dots)x_p = y_r & (L_r) \\ & 0 & 0 = y_{r+1} & (L_{r+1}) \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 = y_n & (L_n) \end{array} \right.$$

Les coefficients $p_1, \dots, p_r$ sont non nuls. Ce sont les **pivots** du système.

Vocabulaire. Soit (S) un système échelonné par lignes. Avec les notations précédentes :

- Les équations $(L_1), \dots, (L_r)$ sont appelées **équations principales**.
- Les équations $(L_{r+1}), \dots, (L_n)$ sont les **équations auxiliaires** (ou de compatibilité).
- Les inconnues $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$, qui ont un pivot, sont appelées **inconnues principales**.
- Les autres sont appelées **variables auxiliaires** (ou paramètres).

Exemple : Résoudre le système : $(S_1) \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ z = -2 \end{cases}$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Dans cet exemple, chaque variable possède un pivot. On résout donc le système par remontée.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$(S_1) \iff \begin{cases} \boxed{2x} + y - 2z = 1 \\ \boxed{-y} - 2z = 2 \\ \boxed{z} = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4 + 4 = 1 \\ y = -4 \\ z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -4 \\ z = -2 \end{cases}$$

La solution est donc un unique point de $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exemple : Résoudre le système : $(S_2) \begin{cases} \boxed{2x} + y - 2z = 1 \\ \boxed{-y} + z = 2 \end{cases}$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Dans cet exemple, la variable z ne possède pas de pivot. On commence donc par passer z en paramètre, c'est-à-dire, dans le second membre du système. Les variables x et y ayant chacune un pivot, on résout par remontée.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$(S_2) \iff \begin{cases} 2x + y = 1 + 2z \\ -y = 2 - z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 1 + 2z - (-2 + z) \\ y = -2 + z \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}z \\ y = -2 + z \\ \textcolor{red}{z} = \textcolor{red}{z} \end{cases}$$

La dernière ligne, toujours vraie, permet d'exprimer toutes les variables en fonction de z , et de reconstituer la colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a ainsi :

$$(S_2) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

On comprend alors que les solutions sont les points de $\mathbb{R}^3$ du type : $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

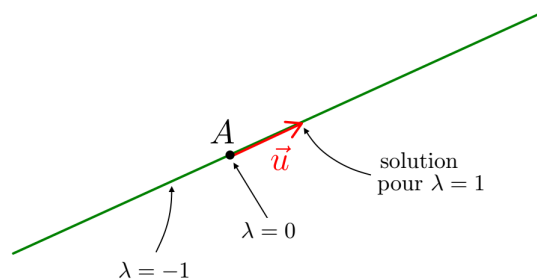
En effet :

► Une solution de (S_2) est clairement de ce type : il suffit de poser $\lambda := z$.

► Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, la troisième ligne donne $z = \lambda$,

donc $(*)$ est vraie, et par remontée des équivalences, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution.

Géométriquement, si l'on pose le point $A \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$, et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, l'ensemble solution est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.



Théorème (de Gauss-Jordan).

Tout système est équivalent à un système échelonné par lignes.

Démonstration. ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS, ou algorithme de Gauss-Jordan. On considère le système :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = y_n & (L_n) \end{cases}$$

- On commence par traiter la variable x_1 . Si tous les coefficients $a_{i,1}$ de la première colonne sont nuls, alors on peut directement passer au traitement de la variable x_2 , et la variable x_1 n'aura pas de pivot. Sinon, quitte à permuter deux lignes, on place un coefficient non nul en position $(1, 1)$.

On note ce coefficient p_1 ; c'est le **pivot** de la variable x_1 .

On élimine toutes les autres variables x_1 de la première colonne en faisant, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{p_1} L_1$$

On a donc :

$$(S) \begin{cases} \boxed{p_1 x_1} + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{p_1 x_1} + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,p}x_p = y'_2 \\ \vdots \\ a'_{n,2}x_2 + \cdots + a'_{n,p}x_p = y'_n \end{cases}$$

- On traite maintenant la variable x_2 , en effectuant le même travail sur le sous-système :

$$(S') : \begin{cases} a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,p}x_p = y'_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a'_{n,2}x_2 + \cdots + a'_{n,p}x_p = y'_n & (L_n) \end{cases}$$

- Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une forme échelonnée du système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{p_1 x_1} + \star + \cdots + \star = \star \\ \quad \boxed{p_2 x_2} + \cdots + \star = \star \\ \quad \vdots \\ \quad \quad \boxed{p_r x_r} + \cdots + \star = \star \\ \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 = \star \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots : \vdots \\ \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 = \star \end{cases}$$

Remarque. Il n'est pas nécessaire de traiter les variables dans l'ordre $x_1, \dots, x_p$; l'important est que lorsqu'un pivot est choisi dans une ligne, cette ligne ne bouge plus jusqu'à la fin de l'échelonnement.

□

Exemples : Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_3) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 4x + 11y = 37 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} -x - 2y + z - t = -1 \\ 2x + y + z + t = 2 \end{cases}$$

4 Méthode générale de résolution des systèmes linéaires

La méthode suivante s'applique à n'importe quel système à n équations et p inconnues.

- On échelonne le système, par exemple par l'algorithme du pivot de Gauss. Quitte à intervertir les variables (classer à gauche les variables qui ont un pivot, et à droite, les variables qui n'en ont pas), on est alors dans la situation suivante :

$$\begin{array}{cc|c} \text{var. principales} & \text{var. aux.} & \\ \hline & & = \boxed{*} \\ & & = \boxed{*} \\ & & \vdots \\ & & = \boxed{*} \\ & & 0 = \boxed{*} \\ & & \vdots \\ & & 0 = \boxed{*} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{équations principales} \\ \\ \\ \text{équations auxiliaires} \end{array}$$

- Si l'une des équations auxiliaires n'est pas vérifiée, c'est terminé : le système est incompatible.
- Si toutes les équations auxiliaires sont vérifiées, le système est compatible. Deux cas :
 - toutes les variables ont un pivot. Dans ce cas, il n'y a pas de variable auxiliaire. Le système est triangulaire $p \times p$ à coefficients diagonaux non nuls. On résout par remontée. L'ensemble des solutions est constitué d'un unique point $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$.
 - il y a des variables auxiliaires (il y en a donc $p - r$). Dans ce cas, on les passe en paramètres, c-à-d au second membre, puis on résout en fonction de ces paramètres le système triangulaire $r \times r$ par remontée. L'ensemble des solutions est infini. Il s'agit d'un "espace affine de dimension $p - r$ ", typiquement une droite si $p - r = 1$, un plan si $p - r = 2$.

Consignes de rédaction :

- Commencer par "Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ".
- Procéder par équivalences de A à Z, en gardant toutes les équations.
- Entourer les pivots.
- Ecrire les opérations sur les lignes.
- Exprimer l'ensemble solution géométriquement.

Partie III - Matrices carrées

Dans ce qui suit, fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappel : L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Calculs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Remarque. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable vis à vis de la somme, du produit, et du produit par un élément de $\mathbb{K}$. Plus précisément, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$0_{n,n}$ est l'élément neutre pour $+$, I_n est l'élément neutre pour $\times$.

Pour nos chers camarades de MPSI, un tel ensemble, muni d'une addition, d'une multiplication, ainsi que de neutres pour chacune de ces opérations, est appelé un **anneau** (ici, un anneau non commutatif).

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $A^p = A \times A \times \dots \times A$ (produit p fois).

A^0 est un produit vide, donc il vaut I_n , c'est-à-dire l'élément neutre pour la multiplication.

Remarque. Attention, la notion de puissance de matrice n'est pas définie si la matrice n'est pas carrée.

Cf exo 13

Définition. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite

► **diagonale** si $\forall i \neq j, A_{i,j} = 0$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

► **triangulaire supérieure** si, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $i > j$, $A_{i,j} = 0$;

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

► **triangulaire inférieure** si pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $i < j$, $A_{i,j} = 0$;

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Proposition (Produit de matrices diagonales).

Un produit de matrices diagonales est une matrice diagonale. Plus précisément

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & & (0) \\ & \lambda_2 \mu_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il suffit de poser le produit matriciel pour le constater ! □

Par récurrence immédiate, on obtient :

Proposition.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & (0) \\ & \lambda_2^p & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Proposition (Produit de matrices triangulaires).

Un produit de matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Plus précisément

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \star \\ (0) & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ & \mu_2 & \star & \cdots & \star \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \star \\ (0) & & & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ & \lambda_2 \mu_2 & \star & \cdots & \star \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \star \\ (0) & & & & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

La même chose est vraie pour les matrices triangulaires inférieures.

Démonstration. Il suffit de poser le produit matriciel pour le constater !

Sinon, on le vérifie par le calcul ; si l'on note T et T' les deux matrices triangulaires écrites ci-dessus, on a : $T_{i,j} = 0$ et $T'_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

- Si $i > j$, $(TT')_{i,j} = \sum_{k=1}^n T_{i,k} T'_{k,j} = 0$, car pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $i > k$ ou $k > j$.
- Si $i = j$ la somme ne contient qu'un terme non nul, le terme pour $k = i$ qui est $\lambda_i \mu_i$. □

De même que précédemment, on obtient :

Proposition.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \star \\ (0) & & & & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & \star & \star & \cdots & \star \\ & \lambda_2^p & \star & \cdots & \star \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \star \\ (0) & & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Définition (matrice nilpotente). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **nilpotente** si pour un certain $p \in \mathbb{N}^* : A^p = 0$.

Le plus petit entier p pour lequel cette identité est vraie est appelé **l'indice de nilpotence de A** .

Exemple : La matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente, d'indice 3.

En général, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice n .

Remarque. Attention, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en général, on a

$$(AB)^p = ABAB \dots AB \neq A^p B^p$$

De même, les identités remarquables ne sont plus valables !

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + B^2 + \underbrace{AB+BA}_{\neq 2AB \text{ en général}}.$$

Définition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B **commutent** lorsque l'on a :

$$AB = BA$$

Remarque. Lorsque A et B commutent, toutes les formules algébriques, valables dans $\mathbb{K}$, ne faisant intervenir que des sommes et des produits sont valables (en gardant à l'esprit que l'élément neutre pour $\times$ n'est pas 1, mais I_n). En particulier, on a, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

► $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

► De façon générale : $(A+B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}$

► $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

► La formule $\sum_{k=0}^p z^k = \frac{1-z^{p+1}}{1-z}$ n'est pas transposable dans l'ensemble des matrices (à cause de la

division); en revanche, la formule $1-z^{p+1} = (1-z) \sum_{k=0}^p z^k$ ne pose aucun problème.

Comme A commute avec elle-même, et avec l'identité, on obtient

$$I_n - A^{p+1} = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^p)$$

Exercice : Calculer A^p , avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition (Matrice symétrique/antisymétrique). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est **symétrique** si $A^T = A$; et **antisymétrique** si $A^T = -A$.

L'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$).

Exemples : $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ est symétrique, $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

I_n est symétrique, pour tout n .

2 Inversibilité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.

Dans ce cas, B est unique, et est appelée **l'inverse** de A . On note $B = A^{-1}$.

L'ensemble des matrices carrées inversibles de taille $n \times n$ est appelé **groupe linéaire d'ordre n** , noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Démontrons l'unicité de l'inverse. S'il existe deux matrices B et C telles que $\begin{cases} AB = I_n \\ BA = I_n \end{cases}$

et $\begin{cases} AC = I_n \\ CA = I_n \end{cases}$, alors, en partant de $AB = I_n$, on en déduit :

$$\underbrace{CA}_{=I_n} B = CI_n, \text{ donc } B = C$$

□

Théorème. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $AB = I_n$, alors $BA = I_n$, et donc, A et B sont inversibles, et $A^{-1} = B$ (et $B^{-1} = A$).

Démonstration. Difficile, et admise à ce stade (on le démontrera au second semestre). □

Remarque. Ce théorème permet d'accélérer certaines démonstrations ; on va voir que l'on peut néanmoins s'en passer dans chaque démonstration du cours.

Exemples :

- ▶ I_n est inversible, car $I_n I_n = I_n$; cela s'écrit : $I_n^{-1} = I_n$.
- ▶ Les matrices des opérations élémentaires sur les lignes sont inversibles. En effet, on a vu que :
 - $P_{i,j} P_{i,j} = I_n$, donc $P_{i,j}$ est inversible, et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.
 - $D_i(\lambda) D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) = I_n$, donc $D_i(\lambda)$ est inversible, et $D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.
 - $T_{i,j}(\lambda) T_{i,j}(-\lambda) = I_n$, donc $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible, et $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

1. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si A est inversible, alors A^T est inversible, et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
3. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. 1. Évident, car $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

2. Il suffit de prendre la transposée de la relation $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$; cela donne :

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T$$

Or, $I_n^T = I_n$, $(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$, et $(A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T$; on obtient donc :

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I_n$$

Ainsi, $(A^{-1})^T$ est bien l'inverse de A^T , soit : $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3. Il suffit de vérifier que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \underbrace{BB^{-1}}_{=I_n} A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

De même,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1} \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n} B = B^{-1}B = I_n$$

□

Remarques.

- De la même manière, tout produit de matrices inversibles A_i , $1 \leq i \leq k$, est inversible, et $(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_1^{-1}$.
- Appliquer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice A inversible préserve son inversibilité. En effet, cela revient à passer de A à FA , où F est une matrice d'opération élémentaire. FA est alors un produit de matrices inversibles, donc est inversible.
- D'un point de vue logique, si A est inversible, l'opération "multiplier à gauche (ou à droite) par A " dans une égalité matricielle est inversible, car pour revenir en arrière, on multiplie par A^{-1} . Autrement dit,

$$R_1 = R_2 \iff AR_1 = AR_2$$

Théorème. L'inversibilité (et l'inverse) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se déduit de la résolution du

système $AX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, pour un second membre $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ quelconque.

Plus précisément, on a l'équivalence entre les deux phrases suivantes :

1. Il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $X, Y \in \mathbb{K}^n$,

$$AX = Y \xLeftrightarrow{(\star)} X = BY$$

(Autrement dit : le système $AX = Y$ admet une **unique** solution, que l'on peut mettre sous la forme BY , pour une certaine matrice B)

2. A est inversible, et $A^{-1} = B$.

Démonstration.

- Montrons 2. $\implies$ 1.

Supposons que A est inversible, et notons $B := A^{-1}$. Alors, pour tous $X, Y \in \mathbb{K}^n$, on a les équivalences suivantes :

$$AX = Y \iff \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n} X = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y \iff X = BY$$

Cela montre 1.

- Montrons 1. $\implies$ 2. Supposons donc 1. vrai.

On note $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, les colonnes de la matrice identité I_n .

L'équivalence $(\star)$ appliquée pour les seconds membres $Y = e_1, \dots, Y = e_n$ donne que les vecteurs $X_1 := Be_1, \dots, X_n := Be_n$ vérifient :

$$\begin{cases} AX_1 &= e_1 \\ \vdots & \\ AX_n &= e_n \end{cases}$$

On a donc :

$$A \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = I_n$$

Or, comme pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i = Be_i$, les X_i sont les colonnes de B (voir remarque 3, page 4).

Donc l'égalité $A \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = I_n$ signifie $AB = I_n$.

À ce stade, on peut invoquer le théorème 2, page 16 pour conclure. Cependant, on peut utiliser le raisonnement symétrique, en utilisant $(\star)$ pour $X = e_1, \dots, X = e_n$; cela donne $BA = I_n$.

On a bien montré 2. □

Exemple : Prenons $n = 2$ et considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} AX = Y &\iff \begin{cases} \boxed{2x_1} - x_2 = y_1 \\ x_1 - 2x_2 = y_2 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ &\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 = y_1 \\ -\frac{3}{2}x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + y_2 \end{cases} & \text{(le système est triangulaire)} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 \end{cases} & \text{(résolution par remontée)} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff X = BY \end{aligned}$$

Ce travail montre que A est inversible, et $A^{-1} = B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Théorème. *L'inversibilité (et l'inverse) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se déduit du fait de pouvoir passer de A à I_n par des opérations élémentaires sur les lignes. Plus précisément :*

Si une suite d'opérations sur les lignes permet de passer de $(A \mid I_n)$ à $(I_n \mid B)$, où B est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible, et $A^{-1} = B$.

Démonstration. Le passage de $(A \mid I_n)$ à $(I_n \mid B)$ signifie matriciellement qu'il existe des matrices d'opérations élémentaires $F_1, \dots, F_p$ telles que

$$F_p \dots F_1 A = I_n \quad \text{et} \quad F_p \dots F_1 I_n = B$$

D'où : $BA = I_n$.

D'après le théorème 2, page 16, on a ainsi $AB = I_n$, et on peut conclure.

On peut également se passer de ce théorème (admettre, c'est avouer sa défaite) : $B = F_p \dots F_1$ donne que B est inversible, car c'est un produit de matrices inversibles. On peut donc multiplier à gauche par B^{-1} dans l'égalité $BA = I_n$; on obtient $A = B^{-1}$. Cela donne l'inversibilité de A , puis $A^{-1} = B$, en passant à l'inverse. □

Exemple : On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1} .

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \\
 L_2 \leftarrow -\frac{2}{3}L_2 \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right) \\
 L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right) \\
 L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right)
 \end{array}$$

Ce travail montre que A est inversible, et que $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Remarque. Si une matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a ses coefficients diagonaux λ_i **tous non nuls**, alors elle est inversible, et son inverse est du type :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \star & \cdots & \star \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Si à l'inverse l'un des λ_i est nul, alors A n'est pas inversible.

Démonstration. Supposons que les λ_i sont tous non nuls. La résolution de $AX = Y$ donne :

$$\begin{aligned}
 AX = Y &\iff \begin{cases} \lambda_1 x_1 + (\dots)x_2 & \cdots & + (\dots)x_n & = & y_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1}x_{n-1} & + (\dots)x_n & = & y_{n-1} \\ & & & \lambda_n x_n & = & y_n \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{\lambda_1}y_1 & + (\dots)y_2 & \cdots & + (\dots)y_n \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ x_{n-1} & = & & \frac{1}{\lambda_{n-1}}y_{n-1} & + (\dots)y_n \\ x_n & = & & & \frac{1}{\lambda_n}y_n \end{cases} \quad (\text{par remontée})
 \end{aligned}$$

Cela prouve bien que A est inversible, et que son inverse a la forme attendue.

Si l'un des λ_i est nul, mettons λ_k pour un $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable x_k n'a pas de pivot. Elle est donc passée en paramètre, ce qui, par exemple pour un second membre nul $Y = 0$, donne une infinité de solutions. Par le théorème page 17, A n'est pas inversible.

□